GYMNASIECASET 2017 – LÖSNINGSFÖRSLAG

Följande lösningar är endast förslag på hur man skulle kunna lösa uppgifterna. Precis som i andra case så finns olika sätt att komma fram till ett bra svar.

Uppgift A - Exempel

Uppskattat antal arbetstimmar per år = ca 1800 h/år

$$\frac{1800\ h/år}{5\ h/besök} = 360\ besök/år$$

$$360 * 7\% \approx 25{,}2\ lyckade\ besök/år$$

$$3500 * 10\% = 350\ nya\ kunder$$

$$\frac{350\ nya\ kunder}{25{,}2\ lyckade\ besök/anställd} \approx 14\ anställda$$

Svar: 14 anställda.

Uppgift B - Exempel

a)

$Intäkter: R = A * P = 8000P - 0{,}1P^2$

För att hitta maxpunkt hos denna andragradsfunktion deriverar vi och sätter = 0. (För att säkerställa maxpunkt kan andraderivatan tas fram för att undersöka om det är en max- eller minpunkt):

$$\frac{dR}{dP} = 8\,000 - 0{,}2P = 0 \quad \Rightarrow \quad P = \frac{8\,000}{0{,}2} = 40\,000\,kr.$$

$$\frac{d^2R}{dP^2} = -0{,}2 \quad (Alltså\ maxpunkt)$$

Antalet lagerarbetare:
$A = 8000 - 0{,}1P = 8000 - 0{,}1 * 40000 = 4000\,st.$

Svar: 4 000 arbetare för priset 40 000 kr ger maximala intäkter.

b)

Nu måste vi ta hänsyn till kostnaden på 5000 kr för varje arbetare:

$$\begin{aligned} Vinst: V = A * P - 5000 * A = (P - 5000) * A &= (P - 5000) * (8000 - 0{,}1P) = \\ &= 8000P - 0{,}1P^2 - 40\,000\,000 + 5000 * P = \\ &= -0{,}1P^2 + 8500P - 40\,000\,000 \end{aligned}$$

Derivering av uttrycket för att hitta maxpunkten på samma sätt som i uppgift a):

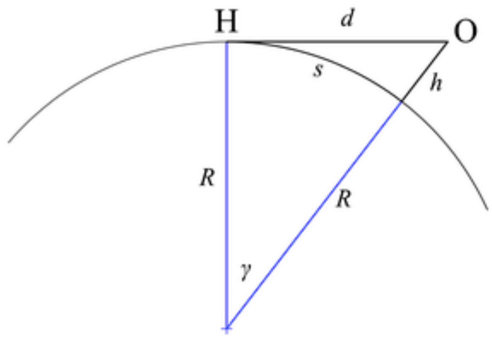
$$\frac{dV}{dP} = -0{,}2P + 8500 = 0 \quad \Rightarrow \quad P = \frac{8\,500}{0{,}2} = 42\,500\,kr.$$

$$\frac{d^2V}{dP^2} = -0{,}2 \quad (Alltså\ maxpunkt)$$

$$A = 8000 - 0{,}1P = 8000 - 0{,}1 * 42\,500 = 3\,750\,st.$$

Svar: Priset höjs till 42 500 kr per arbetare och antalet arbetare sjunker till 3 750 st. Detta anses rimligt då en ökad kostnad per arbetare bör göra att vi vill ha färre arbetare men till högre pris.

Uppgift C - Exempel



Figuren ovan visar hur problemet kan tolkas där R = jordens radie, h = Mont Blancs höjd och γ = vinkeln mellan Zürich (H) och Mont Blanc (O). Beroende på hur man väljer att tolka fågelvägen kan både *s* och *d* beskriva sträckan mellan Mont Blanc och Zürich. Det är dock marginell skillnad mellan de båda alternativen och de kommer att ge samma svar. Eftersom som vi har alla sökta värden givna, väljer vi istället att räkna fram någon av dem och jämföra med det givna värdet.

Jordens radie:

$$O = 4 * 1000\ mil = 40\ 000\ km$$

$$O = 40\ 000 = 2\pi R$$

$$R = \frac{40\ 000}{2\pi} \approx 6370\ km$$

Exempel 1: Om *s* används som avstånd mellan Mont blanc och Zürich.
Genom att räkna ut vinkeln för hur långt man kan se från Mont Blanc och sedan dividera med 360° (eller 2π) kan man räkna ut lång cirkelsektorn s blir:

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{närliggande}{hypotenusan}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{R}{R+h}\right)$$

$$\frac{\gamma}{360°} = \frac{\cos^{-1}\left(\frac{R}{R+h}\right)}{360°}$$

$$\frac{s}{Jordens\ omkrets} = \frac{\gamma}{360°}$$

$$s = \frac{\gamma}{360°} * O = \frac{\cos^{-1}\left(\frac{R}{R+h}\right)}{360°} * O = \frac{\cos^{-1}\left(\frac{6370}{6370+4{,}863}\right)}{360°} * 40\ 000 \approx 247{,}3\ km > 215\ km$$

Alltså: Man kan se ett 4 863 m högt berg på avståndet 247,3 km, alltså kan vi se Mont Blanc!

Exempel 2: Om s används som avstånd mellan Mont Blanc och Zürich. Hur högt berg kan man som mest se på avståndet 215 km:

$$\gamma = \frac{215\ km}{40\ 000\ km} * 360° = 1{,}935°$$

$$\cos(\gamma) = \frac{närliggande}{hypotenusan} = \frac{R}{R+h} \quad \rightarrow$$

$$h = \frac{R}{\cos(\gamma)} - R = \frac{6370\ km}{\cos(1{,}935°)} - 6370\ km \approx 3{,}634\ km = 3634\ m < 4863\ m$$

Alltså: På avståndet 215 km kan vi se ett 3634 m högt berg. Eftersom Mont Blanc är högre kan vi se det!

Exempel 3: Om man istället tolkat *d* som avståndet mellan Mont Blanc och Zürich kan vi använda Pythagoras sats för att få fram hur lång man kan se från Mont Blancs topp:

$$R^2 + d^2 = (R+h)^2 \quad \rightarrow$$

$$d = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} = \sqrt{(6370 + 4{,}863)^2 - 6370^2} \approx 249\ km > 215\ km$$

Alltså: Vi kan se ett berg med höjden 4863 m på avståndet 249 km. Mont Blanc ligger bara 215 km bort, alltaså kan vi se berget!

Exempel 4: På samma sätt som i förra exemplet kan vi räkna ut högt berg vi kan se om det ligger 215 km bort genom att använda Pytagoras sats:

$$h = \sqrt{R^2 + d^2} - R = \sqrt{6370^2 + 215^2} - 6370 \approx 3{,}627\ km = 3\ 627\ m < 4\ 863\ m$$

Alltså: På avståndet 215 km kan vi se ett berg som är 3627 m högt. Mont Blanc är högre, alltså kan vi se det!

OBS! Det finns fler korrekta lösningar till denna uppgift. Dessa är bara exempel.

Uppgift D - Exempel

I denna uppgift går det att diskutera en mängd för- och nackdelar med de båda alternativen då båda alternativens kostnader summeras till 800 000 kr.

- Att köpa binder kapital som innbär att man behöver låna till ränta eller lägga pengar man har som annars kunnat ge bättre avkastning på annat sätt - ”Pengar idag är bättre än pengar imorgon”
- Att hyra ger en säkerhet om produktionen skulle förändras eller om oförutsedda problem med maskinen skulle uppstå då företaget eventuellt inte behöver stå för dessa kostnader.
- Det finns även argument för att köpa såsom trygghet i att äga sin egen maskin och man kan diskutera olika risker med de båda alternativen